TITLE:

Topological Completionと Realcompactificationについて (最近の位相空間論)

AUTHOR(S):

石渡, 毅

CITATION:

石渡, 毅. Topological Completion と Realcompactificationについて (最近の位相空間論). 数理解析研究所講究録 1972, 148: 47-61

ISSUE DATE:

1972-06

URL:

http://hdl.handle.net/2433/106762

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ KURENAI 紅 Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
148巻 1972年 47-61

Topological completion と Realcompactification について

東京学芸大 石渡 毅

§1 序

与えられた空間X，またはそれに関連した性質を調べるのに，Xを取扱い易い空間Yに埋蔵して，そのYの助けをかりて考察を進める手法が非常に有効であることは，よく知られている。ある意味でこの表題もそれに関連したことがらである。一般に与えられた完全正則T_1空間Xに対して上のYとしてβX（Čechのcompactification [3]）を用いることは，位相空間の研究手段としては常套的なものである。特にX上の有界関数(環)の研究には欠くことのできないものである。しかし非有界な関数(環)に対しては効果的でなく，これについては，1948年Hewitt [11]によりQ－空間の概念が導入され，上のYとしてXのrealcompactification υX が登場し，一般の関数(環)，およびX自身の性質の研究に対して一応十分な効果をあげた。（$X=\upsilon X$のときXはQ－空間，また

は realcompact space とよばれている)

最初にのべたように，X を Y に埋蔵するのに Y として βX か υX をとることが普通であるが，実は，この υX に関してはいろいろと delicate な点があり，少々扱いにくい面がある。これは次の有名な白田の定理 [26] が簡潔にそれを指摘している：1) X の各閉 discrete subspace が非可測濃度をもつとき，X : realcompact $\Longleftrightarrow$ X : topologically complete. 2) X が discrete のとき，X : realcompact $\Leftrightarrow$ X の濃度が非可測，3) X : realcompact $\Longleftrightarrow$ X 上の measure は trivial なものに限る。　これより discrete または metrizable な X に対して，無条件で $X = \upsilon X$ は主張できないことが分る。

他方 βX，υX 以外に与 X の uniform structure による X の完備化が可能なことが知られている。その中で X の最精の uniform structure による完備化を μX で示し，これを X の topological completion とよび，また $X = \mu X$ のとき X は topologically complete であるといわれる。この μ に関しては，υ と異り，X が discrete または metrizable のとき，つねに $X = \mu X$ となる。白田の上記定理より可測濃度が存在しなければ $\mu = \upsilon$ であり，存在すれば $\mu \neq \upsilon$ となることが分る。一般に濃度に関係なく $X = \upsilon X$ なら $X = \mu X$ が成立している。

可測濃度に関しては論説[1], [2] を参照していたゞくとして，こゝでは位相空間論の立場から2つの operator υ, μ についていくつかの類似点と相異点を§2であげて，§3 で少々新しい結果（[15], [16]）を付け加えてみたいと思う。勿論この外に，β と υ の関連性，写像とのかゝわりあい（例えば[6], [13]…）…等いろいろ問題点があるが，こゝではそれにはふれないことにする。これらの点から可測濃度の存在については勿論何も言えないが，以下の性質からは半々といったところであろうか？

* * *

文献をすべてあげることは不可能なことで，くわしくはここであげた論文の引用文献をみていたゞきたい。用語の説明は殆んど省略したが，大体[9]にしたがった。また簡単にするため箇条書きし，°のついた番号（例えば 2°）は υ についての，*のついた番号（例えば 2^*）は μ についての性質を述べるように心掛けた。つぎに R, N はそれぞれ実数，自然数の空間またはその copy を示し，realcompact および topologically complete は，おのおの r.c，t.c なる記号で表わしてある。"$\cong$" は同相を示し，$|X|$ は X の濃度を，Π は直積を表わすものとする。なお空間はすべて完全正則で T_1 とする。$c = |R|$ とする。

§2 類似点と相異点について

1) $X \subset \mu X \subset \upsilon X \subset \beta X$。 [9][20]

2°) $\upsilon X \cong \prod_{\alpha} R_\alpha$ の閉部分集合, $R \cong R_\alpha$. [26]

2*) $\mu X \cong \prod_{\alpha} M_\alpha$ の閉部分集合, M_α ; metric space. [20]

3°) υX は all countable normal cover よりなる unif. structure による X の完備化である。 [26]

3*) μX は finest uniformity による X の完備化である。[20]

4°) υX は separable metric spaces の inverse system の limit である。

4*) μX は metric spaces の inverse system の limit. [20]

5°) X に対して υX は次の Y で characterize される

1) Y は r.c で X を dense に含む,

2) X から R への任連関は Y へ連続拡大できる。 [9]

5*) X に対して μX は次の Y で characterize される.

1) Y は t.c で X を dense に含む

2) X から任 metric space への連関は Y へ連続拡大できる。[20]

6°) Xに対してυXはつぎの(a), (b)をみたす最小のr.c space Yとしてcharacterizeされる.

a) XはYでdenseである.

b) XからRへの任連関はYへ連続拡大される。 [9]

6*) Xに対してμXはつぎの(a), (b)をみたす最小のt.c space Yとしてcharacterizeされる.

a) XはYでdenseである

b) XからRへの任有界連関はYへ連続拡大される。 [20]

7°) 次は同値である.

1) Xはr.cである.

2) $\forall p \in \beta X - X$, $\exists C \subset \beta X - X$, $p \in C$, CはβXのG_δ-closed set .

3) $\forall p \in \beta X - X$, $\exists$ Countable star-finite partition of unity $\Phi = \{\varphi_n ; \Sigma \varphi_n = 1\}$, $p \notin cl_{\beta X}\, O(\varphi_n)$。 [27]

7*) 次は同値である

1) Xはt.cである、

2) $\forall p \in \beta X - X$, $\exists$ partition of unity $\Phi = \{\varphi_\lambda ; \Sigma \varphi_\lambda = 1\}$ $p \notin cl_{\beta X}\ O(\varphi_\lambda)$。 [27]

$X^* = \beta X - X$の性質については§3でふれる。

8°) X ; compact $\Longleftrightarrow$ maximal open cover は存在しない。

X : r.c. $\Longleftrightarrow$ maximal cozero cover は countable subcover をもつ。

8*) X : t.c $\Longleftrightarrow$ maximal cozero cover は normal である $\Longleftrightarrow$ maximal open cover は normal. [5]

9°) $X = \bigvee_{\lambda} X_{\lambda}$ (topological sum) のとき

各 X_{λ} が r.c でも X は r.c とは限らない.

9*) 各 X_{λ} が r.c なら X も t.c である。 [20]

以上は popular でかつ割合によく利用されているものと思われる性質である。その他については最後の文献等を参照されたい.

§3. いくつかの考察について

10°) "β" と直積との関係は 1959 年 Glicksberg [10] により最終的な結果が得られたが, "υ" と直積との関係については最初にのべたように濃度が関係してくるので, 研究がおくれ, 60年代後半にいくつかの結果がでた。そのうち Comfort [4] が主なものである。 [19] では $\upsilon(X \times Y) = \upsilon X \times \upsilon Y$ になる必十条件が与えられているが, これは等号が成立する二

と自身を条件にかいたもので完全とはいえない（[19]では
このため定理としてのせてはいない）。Comfort の主な結果
はつぎのようなものである。

1) Y : locally compact, r.c, $|Y|$ が非可測のとき，任 X に対して，$\upsilon(X\times Y)=\upsilon X\times\upsilon Y$.

2) $|X\times Y|$ が非可測のとき，

イ) υX : locally compact, Y : k-space $\Longrightarrow \upsilon(X\times Y)=\upsilon X\times\upsilon Y$

ロ) X : pseudocompact, Y : k-space $\Longrightarrow$ 〃 〃

ハ) $\upsilon X\times Y$, $\upsilon X\times\upsilon Y$ が k-space $\Longrightarrow$ 〃 〃

ニ) Y の各 compact subsets および υX の各 pseudocompact subsets が非可測で，Y : k-space, υX locally compact $\Rightarrow \upsilon(X\times Y)=\upsilon X\times\upsilon Y$。

10*). さて "μ" と直積との関係については濃度に関係なく上と同様なことが成立する [15]，すなわち上の 2) の条件 "$|X\times Y|$ が非可測" が不要で，イ)～ニ) で υ を μ でかえた定理が成立するのである。さらに面白いと思われる定理は，"$\upsilon(X\times Y)=\upsilon X\times\upsilon Y \Longrightarrow \mu(X\times Y)=\mu X\times\mu Y$" が成立することであろう（証明に 5*) を利用）。また 2*) は [20] の定理の一般化でもある。

さて，10°) でのべたように McArthur [19] も "υ" についていろいろの結果をだしているが，11°, 12° をあげておこう。

11°) D: *discrete* で $|D|$ が可測, Y を D, υD, βD のいづれかとすると $\upsilon(D\times Y)\neq \upsilon D\times \upsilon Y$ である。 これに対してすぐ 11*) がえられる (10* より) [19]

11*) $\mu(D\times D)=\mu D\times \mu D$, $\mu(D\times \beta D)=\mu D\times \beta D$。

この 11) と 10) より "μ と直積" との関係は "υ" のそれより, はるかに求めやすいことが予想される。

12°) $\mathcal{R}=\{X\ ;\ \upsilon(X\times Y)=\upsilon X\times \upsilon Y \text{ for } \forall Y\}\ni X\Rightarrow X:\text{r.c.}$

$\mathcal{M}=\{X\ ;\ \upsilon(X\times Y)=\upsilon X\times \upsilon Y \text{ for } \forall \text{ r.c } Y\}\ni X\Leftrightarrow X:\text{r.c}$ [19]

12*) 上で υ を μ に, r.c を t.c でかえうる [15]

Comfort は 'locally compact な空間 X で υX が k-space でないものが存在するか" という問題を提起した。これに対して, 肯定的な解, すなわち存在することが示されたが, その空間の濃度は $\aleph_2$ であった。さらに Negrepontis [21] は簡単に濃度 $\aleph_1$ の空間を構成してみせた。この例は色々面白い性質をもっていると思われ, [14] でも利用させてもらった。この問題を一般的に取扱った定理はないように見うけられるので, これを [13] [14] [15] で扱ってみた。おもなところはつぎのようなものである。

13) 1) μX : locally compact, $\mu X \neq \nu X \Rightarrow \nu X$ は not k-space.

2) νX : locally compact $\Longrightarrow \mu X = \nu X$

3) X : normal で 任 countably compact closed subset が compact, $X \subsetneqq Y \subset \nu X \Rightarrow Y$ は not k-space。

これらの結果はもう少し精しくなる。また上より，X が discrete，$|X|$：可測 のとき $X = \mu X \neq \nu X$ は分っているが さらに νX は k-space でないことが分る。

14). Mandelker は [17]，[18] において round subset of βX, round z-filter なる概念を用いて remote points, Maximal ideals の共通部分 $\cap\{M^p ; p \in X^*\}$，$C(X)$ の元で compact な support をもつ元の全体 $C_K(X)$ について研究し，さらに stable family なる考え方を入れ，realcompact の概念を一般の空間に拡張している。

i°) $\beta X - \nu X$ は round subset of βX. [17]

i*) $\beta X - \mu X$ は round subset of βX. [16]

ii°) X : r.c $\Longrightarrow \cap\{M^p : p \in X^*\} = C_K(X)$ [9]

ii*) X : t.c $\Longrightarrow$ 〃 〃 [22]

iii) $\beta X - X$ が round subset of $\beta X \Longleftrightarrow$ 〃 〃 [17]

一般に X : r.c $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ f.i.p をもつ閉集合族 $\mathfrak{F}$ が stable ならば $\cap \mathfrak{F} \neq \phi$ とすると，r.c の殆んどの性質が保たれる。 [18]

つぎに $X^* = \beta X - X$ の性質に関してRudin [25]の N^* の P-points, Fine and Gillman [7] の Rの remote points が発見されて（以来？）色々と研究され，そのうち r.c でなりたつ性質をRobinson [23] は t.c まで拡張し，また Plank [24] は P-points, remote points の概念を β-subalgebra なる考えを導入することにより統一的に扱って，綺麗なよい結果をえている。以下の 15)〜20)では これらの定理の改良，拡張を試みる。そして，いくつかの点では或意味で完全な形が与えられたものと思っている。Xに対して，$X_\ell = \{x ; \exists$ locally compact nbd of $x\}$, $X - X_\ell = R(X)$ とおき，こゝで仮りに $int_X R(X) = \phi$ のとき，X は almost locally compact とよんでおく。[12] で X およびX^* が σ-compact ならば Xは almost locally compact であることが証明されている。（$h^\beta \in C(\beta X)$と以下考える）.

15°) X : locally compact, r.c $\Rightarrow$ 任 zero set $Z \in Z(X^*)$ に対して $cl_{X^*}\, int_{X^*} Z = Z$. [7]

15*) 上で r.c を t.c でかえうる。 [23]

[定理] X : not pseudocompact (= p.c) , $R(X)$: t.c のとき

$$int_{X^*}(cl_{\beta X} R(X) - R(X)) \cap (\beta X - \mu X) = \phi \iff X : \text{almost locally compact}$$

$$\iff \forall Z(h^\beta) \subset \beta X - \upsilon X ;\ cl_{X^*}\, int_{X^*} Z(h^\beta) = Z(h^\beta)$$ [16]

16*) X: locally compact, t.c $\Rightarrow \upsilon X - X$ は nowhere dense in X^* [23]

[定理] X: not p.c, かつ t.c のとき

X; almost locally compact $\Leftrightarrow \upsilon X - X$ は nowhere dense in X^* [16]

17°) X: r.c, $H \subset X^*$ とする

i) $X \cup H$: pseudocompact $\Rightarrow$ H は X^* で dense.

ii) もし X が locally compact なら (i) の逆が成立する [8]

17*) 上で r.c を t.c でかえうる. [23]

[定理] X not p.c, $H \subset \beta X - \upsilon X$. とする

i) $X \cup H$: pseudocompact $\Rightarrow$ H は $\beta X - \upsilon X$ で dense,

ii) $R(X)$ が relatively pseudocompact なら (i) の逆が成立する [16]

この定理は 17*) を含むことが証明できる。

連続体の仮説を用いる定理には (CH) をつけておくことにする. Rudin [25] の N に関する定理の一般化として,

18*) (CH). X: locally compact, t.c $\Rightarrow$ X^* は P-points よりなる dense subset を含む [23]

[定理] (CH). $R(X)$ が relatively pseudocompact $\Rightarrow \beta X - \upsilon X$ は X^* の P-points よりなる subset K をふくみ, かつ K は $\beta X - \mu X$ で dense である [16]

19) Plank は次を証明した.

(CH). X: separable metric, noncompact, 孤立点なし

$\Longrightarrow$ X^* は $2^{\mathfrak{c}}$ 個の remote points よりなる dense subset を含む [24]

Robinson は上の separability を local compactness でかえうることを [23] で示した

[定理] (CH). X: almost locally compact, metric, 孤立点なし.

$\Rightarrow$ X^* は remote points の集合 K で K は $X^* - cl_{\beta X} R(X) \cup \nu X$ で dense, なるものをふくむ [16]

20) Plank の結果 [24] のうち次のような拡張がえられる.

[定理] (CH). X: not p.c. almost locally compact とする.

もし $\{A_\alpha ; \alpha \in \Gamma\}$ が $C(X)$ の β-subalgebras の family で $|A_\alpha| = \mathfrak{c}$, $(\forall \alpha \in \Gamma)$, $|\Gamma| = \mathfrak{c}$ ならば X^* は $\beta X - \mu X \cup cl_{\beta X} R(X)$ で dense な subset K をふくみ, かつ K の各点は各 $\alpha \in \Gamma$ に対して同時に A_α-point になっている [16]

最後に P-points と round subsets の関係として

21). $\nu X - X$ の点 p に対して $\{p\}$ が βX の round subset ならば p は X^* の P-point となる。 [16]

こゝで $p \in \nu X - X$ はおとせないし, また 21) の逆は駄目な例はたやすくつくれる。

文 献

[1] 難波完爾: 算術的拡大作用素について。数学. 22 (1970), 92～105.

[2] 竹内外史; 最近の集合論, 数学. 23 (1971)。 18～26.

[3]. E. Čech: On bicompact spaces. Ann. M. 38 (1937), 823～844.

[4] W. W. Comfort: On the Hewitt realcompactification of a product space. Trans. Amer. M. S. 131 (1968). 107～118.

[5] N. Dykes: Mappings and realcompact spaces. Pacif J. M. 31 (1969). 347～358.

[6] ________ : Generalizations of realcompact spaces (to appear).

[7] N. J. Fine and L. Gillman: Extension of continuous function in βX. Bull. Amer. M. S. 66 (1960). 376～381.

[8] ________________ : Remote points in βR. Proc. Amer. M. S. 13 (1962). 29～36.

[9] L. Gillman and M. Jerison: Rings of continuous functions. Van Norstrand, Princeton. N. J. 1960.

[10] I. Glicksberg: Stone-Čech compactifications of products. Trans. Amer. M. S. 90 (1959). 369～382.

[11] E. Hewitt: Rings of real valued continuous functions. Van Norstrand. Princetone. N. J. 1960.

[12] M. Henriksen and J.R. Isbell : Some properties of compactifications. Duke. M. J. 25 (1957). 83 ~ 105.

[13] T. Isiwata : Mappings and spaces. Pacif. J. M. 20 (1967). 455 ~ 480.

[14] ________ : Inverse images of developable spaces. Bull. Tokyo Gakugei Univ. Ser. IV. 23 (1971). 11 ~ 21.

[15]. ________ : Realcompactifications and topological completions (to appear. Proc. Japan. Acad.)

[16] ________ : Some properties of the remainder of Stone-Čech compactification.

[17] M. Mandelker : Round z-filters and round subsets of βX. Israel J. M. 7 (1969). 1 ~ 8.

[18] ________ : Supports of continuous functions. Trans. Amer. M. S. 156 (1971). 73 ~ 83.

[19]. W. G. McArthur : Hewitt realcompactifications of products. Canad. J. M. 22 (1970). 645 ~ 656.

[20]. K. Morita : Topological completions and M-spaces. Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku. 10 (1970). 271 ~ 288.

[21] S. N. Negrepontis : An example on realcompactification. Arch. M. 20 (1969). 162 ~ 164.

[22]. S. M. Robinson: The intersection of the free maximals in a complete space. Proc. Amer. M. S. 17 (1966). 468 ~ 469.

[23] S. M. Robinson: Some properties of $\beta X - X$ for complete spaces. Fund. M. 64 (1969). 335~340.

[24] D. Plank: On a class of subalgebras of $C(X)$ with applications to $\beta X - X$. Fund. M. 64 (1969). 41~54.

[25]. W. Rudin: Homogeneity problems in the theory of Čech-Compactifications. Duke. M. J. 23 (1956). 409~419.

[26] T. Shirota: A class of topological spaces. Osaka. M. J. 4 (1952). 23~40.

[27] H. Tamano: On Compactifications. J. M. Kyoto Univ. 1 (1962). 161~193.